2020（令和 2）年度　福岡女子大学　一般入試個別学力検査

〔 前期日程試験問題 〕

【国際教養学科】

数　学

【 90 分 】

注意事項

1　試験開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。

2　問題は 5 ページから 13 ページにあります。問題は全部で **5 題**です。

3　解答用紙には裏にも解答欄があります。

4　問題の小問がある場合は、(1)、(2)、(3)、…のように小問番号を各自で解答用紙に明記してください。

5　試験中に問題冊子の印刷不鮮明、ページの落丁、乱丁および解答用紙の汚れ等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせてください。

6　試験開始と同時に解答用紙の**受験番号欄に受験番号**を記入してください。

7　試験終了後、**問題冊子は持ち帰ってください。**

$\boxed{1}$ 放物線 $C: y=-x^2+1$ と x 軸の交点を $\mathrm{A}(a,0)$，$\mathrm{B}(b,0)$ とする（$a<0<b$）．また，$0<p<1$ とするとき，C 上の点 $\mathrm{P}(p,-p^2+1)$ と $\mathrm{Q}(-p,-p^2+1)$ を考え，点 P, Q における C の接線をそれぞれ ℓ, m とする．以下の問に答えなさい．

(1) 四角形 ABPQ の面積 S_1 を p を用いて表しなさい．

(2) 四角形 ABPQ の面積 S_1 が最大になるときの p の値とそのときの S_1 の値を求めなさい．

(3) 放物線 C と x 軸で囲まれる部分の面積を S_2 とする．ℓ と m と x 軸で囲まれる部分の面積を S_3 とする．p が (2) で求めた値をとるとき，S_1 と S_2 と S_3 の比を求めなさい．

（下書き用紙）

試験問題は次に続く。

$\boxed{2}$ 三角形 $A_1A_2A_3$ の頂点 A_1 にコマが置かれている．コインを 3 回投げてコマの次の位置を決定する．次の位置は表の出た回数とコマの現在位置によって下の表に従って決定し，コマをその位置に置く．

次の位置		表の出た回数 0	1	2	3
現在位置	A_1	A_1	A_1	A_2	A_3
	A_2	A_2	A_1	A_2	A_2
	A_3	A_3	A_1	A_3	A_3

この操作を n 回繰り返した後に，コマが頂点 A_1, A_2, A_3 に置かれている確率を，それぞれ p_n, q_n, r_n とする．以下の問に答えなさい．

(1) コマが頂点 A_1 にあるとき，コマが頂点 A_1 にとどまる確率，頂点 A_2 に移動する確率，頂点 A_3 に移動する確率をそれぞれ求めなさい．

(2) $p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}$ それぞれを，p_n, q_n, r_n を用いて表しなさい．

(3) (2)で求めた p_{n+1} の式と $p_n + q_n + r_n = 1$ であることを用いて，p_n を n の式で表しなさい．

（下書き用紙）

試験問題は次に続く。

$\boxed{3}$ 三角形 OAB は $\angle$O と $\angle$A と $\angle$B の角度の比が $3:2:1$ であり，OA の長さは 1 である．$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ （s，t は実数）で定まる点 P について考える．以下の問に答えなさい．

(1) 点 P が三角形 OAB の周上または内部の点であるとき，s，t が満たす条件を答えなさい．

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2=\ell$ とするとき，ℓ を s，t を用いて表しなさい．

(3) ℓ の最小値，およびそのときの s，t の値を求めなさい．

(4) ℓ が最小になるとき，三角形 OAP，OBP，ABP の面積の比を求めなさい．

(5) $\angle\mathrm{OPA}=\theta$ とする．ℓ が最小になるとき，$\sin\theta$ の値を求めなさい．

（下書き用紙）

試験問題は次に続く。

$\boxed{4}$ (1) $y = |x^2 - 4x + 3| - 2x + 6$ のグラフの概形をかきなさい.

(2) $y = |x^2 - 4x + 3|$ と $y = 2x - 6 + k$ の共有点の個数は定数 k の値によってどのように変わるか答えなさい.

（下書き用紙）

試験問題は次に続く。

$\boxed{5}$ 有理数は $\dfrac{q}{p}$ （p, q は整数，$p \neq 0$）と表せることを利用して，以下の問に答えなさい．

(1) $\tan\theta$（$0^\circ < \theta < 45^\circ$）が有理数であるとき，$\tan 2\theta$ も有理数であることを示しなさい．

(2) $\tan\alpha$ と $\tan\beta$（$0^\circ < \alpha < \beta < 90^\circ$）が有理数であるとき，$\tan(\beta - \alpha)$ も有理数であることを示しなさい．

(3) $\tan 4^\circ$ が無理数であることを示しなさい．ただし，$\sqrt{3}$ が無理数であることは証明せずに利用してよい．