2025（令和 7）年度 福岡女子大学 一般選抜 前期日程 個別学力検査 解答例

数学（環境科学科）

$\boxed{1}$ (1) $11001011_{(2)} = 203_{(10)} = \mathrm{CB}_{(16)}$
$2345_{(8)} = 1253_{(10)} = 4\mathrm{E}5_{(16)}$

(2) $145_{(16)} = 101000101_{(2)}$
$\mathrm{B}2_{(16)} = 10110010_{(2)}$

(3) 十進法で表現して 3 桁となる自然数 N の範囲は

$$10^2 \leqq N < 10^3$$

であり，十六進法で表現して 3 桁となる自然数 N の範囲は

$$16^2 \leqq N < 16^3$$

である．これらを同時に満たす N の範囲は

$$16^2 \leqq N < 10^3$$

となるので，これを満たす自然数 N の個数は

$$10^3 - 16^2 = 744 \text{（個）}$$

となる．

(4) $1000111001010010_{(2)} = 8\mathrm{E}52_{(16)}$
$1000110011111011_{(2)} = 8\mathrm{CFB}_{(16)}$
となるので，該当する漢字は「山口」となる．

$\boxed{2}$ (1) それぞれ以下の通りとなる．

$$\log_{10} 20 = \log_{10}(2 \cdot 10) = \log_{10} 2 + 1 \fallingdotseq 1.301$$
$$\log_2 5 = \frac{\log_{10} 5}{\log_{10} 2} = \frac{0.6990}{0.3010} \fallingdotseq 2.322$$

(2) $\log_{10} 20^{24}$ を計算すると

$$\log_{10} 20^{24} = 24 \log_{10} 20 = 24 \times 1.301 = 31.224$$

となる．よって，

$$31 < \log_{10} 20^{24} < 32$$
$$10^{31} < 20^{24} < 10^{32}$$

となる．従って，20^{24} の桁数は 32 桁となる．

(3) 最高位の数が a である自然数 N について，$\log_{10} N$ の小数部分を q とするとき，

$$\log_{10} a \leqq q < \log_{10}(a+1)$$

が成り立つ．(2) の結果から，$\log_{10} 20^{24}$ の小数部分は 0.224 であるので，

$$\log_{10} 1 < 0.224 < \log_{10} 2$$

が成り立つことが分かる．従って，20^{24} の最高位の数字は 1 である．

(4) $\log_2 20^{24}$ を計算すると (1) の結果より

$$\log_2 20^{24} = 24 \log_2 20 = 24 \times 2.322 = 103.728$$

となる．よって

$$103 \leqq \log_2 20^{24} < 104$$

が成り立つ．従って，20^{24} を 2 進数で表した時の桁数は 104 桁である．

$\boxed{3}$ (1) 問題文より，以下が成り立つ．

$$\overrightarrow{\mathrm{AE}} = \frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

(2) 問題文より，以下が成り立つ．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + s\overrightarrow{\mathrm{AE}} \\ &= (1-s)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{3}{4}s\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AP}} &= t\overrightarrow{\mathrm{AF}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}} \\ &= \frac{2}{3}t\overrightarrow{\mathrm{AB}} + (1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

(3) 前問より，以下が成り立つ．

$$1 - s = \frac{2}{3}t, \quad \frac{3}{4}s = 1 - t$$

これらから，$3 - 3s = 2t$，$3s = 4 - 4t$ となる．
すると，$3 - 4 + 4t = 2t$ となり，$t = \frac{1}{2}$ となる．
よって，$s = 1 - \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$ が得られる．
以上から，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

(4) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ については，m, n を用いて以下のように表せる．

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AD}} &= m\overrightarrow{\mathrm{AP}} \\ &= m(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}) \\ &= \frac{1}{3}m\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}m\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AD}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + n\overrightarrow{\mathrm{BC}} \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}} + n(\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}) \\ &= (1-n)\overrightarrow{\mathrm{AB}} + n\overrightarrow{\mathrm{AC}}\end{aligned}$$

これらから，$\frac{1}{3}m = 1 - n$，$\frac{1}{2}m = n$ となる．
すると，$m = 2n$ となり，$\frac{2}{3}n = 1 - n$ から $n = \frac{3}{5}$ が得られる．
つまり，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{3}{5}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ なので，BD：DC は 3：2 となる．

(5) 以上の結果から，

$$\begin{aligned}x\overrightarrow{\mathrm{AP}} + y\overrightarrow{\mathrm{BP}} + z\overrightarrow{\mathrm{CP}} &= x(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}) + y(\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}) + z(\overrightarrow{\mathrm{AP}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}) \\ &= x(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}) + y(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}) + z(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AC}}) \\ &= \overrightarrow{\mathrm{AB}}(\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{1}{3}z) + \overrightarrow{\mathrm{AC}}(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z)\end{aligned}$$

これが $\overrightarrow{0}$ となるので，$x - 2y + z = 0$，$x + y - z = 0$ となる．すると，$y = 2x$，$z = x + y = x + 2x = 3x$ が得られる．以上から，$x : y : z = 1 : 2 : 3$ となる．

$\boxed{4}$ (1) 表の出た回数が 3 回であるとき，塗りつぶしたマス目が一直線に並ぶような結果は 8 通りである．一方，表の出た回数が 3 回となるような結果は全部で

$${}_9\mathrm{C}_3 = 84 \text{（通り）}$$

であるから，A が空集合となるのは

$$84 - 8 = 76 \text{（通り）}$$

である．

(2) 表の出た回数が 4 回であるとき，塗りつぶしたマス目が一直線に並ぶのは，3 つの数で一直線に並んで，残りの 1 つの数字は残った 6 個のマス目のうち任意の数字でよいので，

$$8 \times 6 = 48 \text{（通り）}$$

となる．一方，表の出た回数が 4 回となるような結果は全部で

$${}_9\mathrm{C}_4 = 126 \text{（通り）}$$

であるから，A が空集合となるのは

$$126 - 48 = 78 \text{（通り）}$$

である．

(3) 表の出た回数が 5 回であるとき，塗りつぶしたマス目が 2 か所で一直線に並ぶのは，集合 A の 2 つの要素が C と R，C と N，R と N，N と N の組み合わせとなる場合なので，

$$3 \times 3 + 3 \times 2 + 3 \times 2 + 1 = 22 \text{（通り）}$$

となる．

(4) 表の出た回数が 5 回であるとき，塗りつぶしたマス目が一直線に並ぶのは，3 つの数で一直線に並んで，残りの 2 つの数字は残った 6 個のマス目のうちの 2 個の数字となる．この 2 つの数字の選び方は ${}_6\mathrm{C}_3 = 15$ 通りあり，一直線の選び方は 8 通りであるので，これらの積を取ると

$$15 \times 8 = 120$$

となるが，これらの中には，A の要素数が 2 のものが重複して数えられている．よって，

$$120 - 2 \times 22 = 76 \text{（通り）}$$

となる．

(5) 表が出た回数が 6 回で，A が空集合となるのは，斜めのいずれかが塗りつぶされない場合なので，2 通りである．

(6) 表の出た回数が 5 回であるという事象を B，そうでない事象を C とする．A が空集合であるという事象を E とする．コインを 9 回投げて表と裏が出るパターンの総数は 2^9 であるから，

$$P(B) = \frac{{}_9\mathrm{C}_5}{2^9} = \frac{126}{2^9}$$
$$P(C) = 1 - P(B) = \frac{2^9 - 126}{2^9}$$

となる．一方，表の出た回数が 5 回であるときに A が空集合となる条件付確率は，${}_9\mathrm{C}_5 = 126$ および，(3) と (4) の結果から

$$P_B(E) = \frac{(126 - 76 - 22)/2^9}{126/2^9} = \frac{28}{126}$$

となる．表の出た回数が 5 回でないときに A が空集合になる条件付確率は，表の出た回数が 2 回以下の場合は必ず A は空集合になり，7 回以上の場合は必ず空集合にならないこと，および (1) と (2) と (5) の結果より，

$$P_C(E) = \frac{{}_9\mathrm{C}_0 + {}_9\mathrm{C}_1 + {}_9\mathrm{C}_2 + 76 + 78 + 2}{2^9 - 126} = \frac{202}{2^9 - 126}$$

となる．以上のことから，A が空集合であったことを知らされた場合，表の出た回数が 5 回であった確率は，

$$\begin{aligned} P_E(B) &= \frac{P(B)P_B(E)}{P(B)P_B(E)+P(C)P_C(E)} \\ &= \frac{28/2^9}{28/2^9+202/2^9} = \frac{28}{230} = \frac{14}{115} \end{aligned}$$

となる．

$\boxed{5}$ (1) $y = e^{-x}\sin x$ より，$y = 0$ とすると $e^{-x} > 0$ より $\sin x = 0$ なので $x = 0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi, \cdots$.
次に，

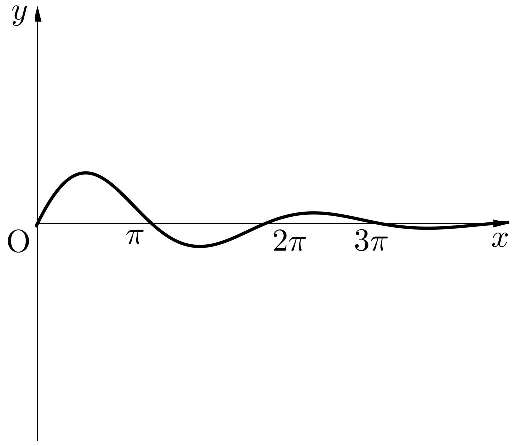
$$\begin{aligned} y' &= -e^{-x}\sin x + e^{-x}\cos x \\ &= e^{-x}(-\sin x + \cos x) \end{aligned}$$

$y' = 0$ とすると，$e^{-x} > 0$ より $\sin x = \cos x$ である．このとき $x = \frac{1}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi, \cdots$.
増減表は次のようになる．

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{5\pi}{4}$		$\frac{9\pi}{4}$	$\cdots$
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$\cdots$
y	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}$	$\searrow$	$-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{5\pi}{4}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{9\pi}{4}}$	$\cdots$

極値については，$x = \frac{\pi}{4} + 2n\pi$ で極大値，$x = \frac{5}{4}\pi + 2n\pi$ で極小値をとる．
なお，$x = \frac{\pi}{4}$ で極大値 $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{\pi}{4}}$，$x = \frac{5}{4}\pi$ で極小値 $-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\frac{5}{4}\pi}$ をとる．

グラフの概形は以下の通り．



(2) 部分積分を利用する．

$$\begin{aligned} \int e^{-x}\sin x\ dx &= -e^{-x}\cos x - \int e^{-x}\cos x dx \\ &= -e^{-x}\cos x - (e^{-x}\sin x + \int e^{-x}\sin x dx) \\ &= -e^{-x}\cos x - e^{-x}\sin x - \int e^{-x}\sin x dx \end{aligned}$$

同形が出てくるので，$\displaystyle\int e^{-x}\sin x\ dx = -\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x) + C$ （C は積分定数.）

(3) 前問を利用すると，

$$
\begin{aligned}
\int_0^{\pi} e^{-x}\sin x\ dx &= \left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)\right]_0^{\pi} \\
&= -\frac{1}{2}e^{-\pi}(0-1) + \frac{1}{2}(0+1) \\
&= \frac{1}{2}e^{-\pi} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2}(e^{-\pi}+1) \\
-\int_{\pi}^{2\pi} e^{-x}\sin x\ dx &= -\left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)\right]_{\pi}^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2}e^{-2\pi}(0+1) - \frac{1}{2}e^{-\pi}(0-1) \\
&= \frac{1}{2}e^{-2\pi} + \frac{1}{2}e^{-\pi} \\
&= \frac{1}{2}e^{-\pi}(e^{-\pi}+1) \\
\int_{2\pi}^{3\pi} e^{-x}\sin x\ dx &= \left[-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x + \cos x)\right]_{2\pi}^{3\pi} \\
&= -\frac{1}{2}e^{-3\pi}(0-1) + \frac{1}{2}e^{-2\pi}(0+1) \\
&= \frac{1}{2}e^{-3\pi} + \frac{1}{2}e^{-2\pi} \\
&= \frac{1}{2}e^{-2\pi}(e^{-\pi}+1)
\end{aligned}
$$

(4) S_k は，初項 $\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1)$，公比 $e^{-\pi}$ の等比数列であり，$0 < e^{-\pi} < 1$ であるので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} S_k$ は収束し，その値は

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n} S_k &= \frac{1}{1-e^{-\pi}}\frac{1}{2}(e^{-\pi}+1) \\
&= \frac{1+e^{-\pi}}{2(1-e^{-\pi})}
\end{aligned}
$$